אופציות וחוזים עתידיים

פרופ' רפי אלדור

שיעור 3-

אופציות אקזוטיות ומכשירים מובנים

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

תוכנית הפגישה

תוכנית הפגישה ב- 14.1.10 :

-אופציות על נכסי בסיס שונים

-התאמת נוסחת בלק ושולס

-אופציות אקזוטיות

-5 אופציות בינאריות ונוסחת בלק ושולס

-מוצרים מובנים

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

הערכת שווי אופציות לפי המודל של BLACK ו- SCHOLES

בשנת 1973 פרסמו שני הפרופסורים למימון פישר בלק ומירון שולס את מאמרם בדבר הערכת שווי אופציה CALL אירופית.

מאמר זה היווה פריצת דרך בתחום הערכת מחירי אופציות. במקביל אליהן פיתח את הנוסחה רוברט מרטון (1973). בשנת 1997 הוענק פרס נובל למירון שולס ורוברט מרטון בזכות הישג מדעי זה (פישר בלק ניפטר ב -1995).

מודל זה מבוסס על יצירת תיק מנכס בסיס ואופציה הנותן תשואה חסרת סיכון. התשואה על תיק זה שווה לריבית חסרת סיכון ומכאן ניתן לגזור את שווי האופציה בהווה.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

הנחות מודל BLACK ו- SCHOLES

- אין הוצאות עסקה ומיסים
- מותרות מכירות בחסר
- אין דיבידנדים
- שער ריבית חסר סיכון קבוע
- סטיית תקן קבועה
- מסחר רציף
- התפלגות מחיר נכס הבסיס היא לוג נורמלי

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

עולם של ודאות- המודל הנאיבי

ערך אופציה שתהיה בתוך הכסף בפקיעה:

$$C = e^{-rT}\left[S(T) - X\right] = S - Xe^{-rT}$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

שווי אופציית רכש אירופית

לפי מודל זה ערכה של אופציית CALL אירופית:

$$C(X) = S * N(d1) - Xe^{-rt} * N(d2)$$

גורם הסתברותי * מחיר מימוש מהוון – גורם הסתברותי * נכס בסיס = אופציה

כאשר:

$$d1 = \frac{1n(S/X) + (r + 0.5\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad d2 = d1 - \sigma\sqrt{t}$$

ו-N(d1) ו-N(d2) הינם ערכי d1 ו-d2 בטבלת ההתפלגות הנורמאלית הסטנדרטית.

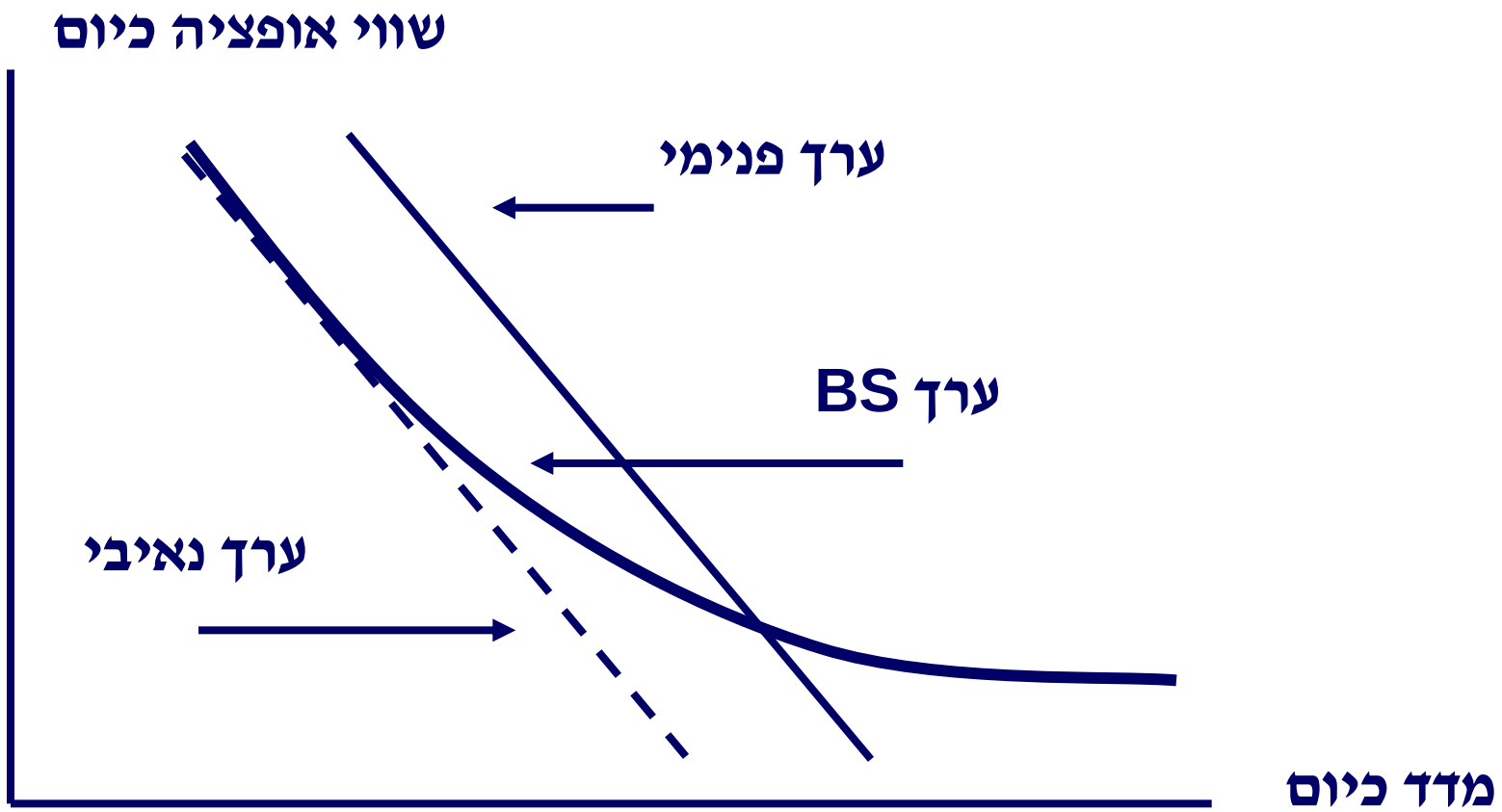
N(d1) שווה בקרוב ל-N(d2) שווה בקרוב להסתברות למימוש האופציה.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

הצגה גראפית ושווי של PUT

ערכה של אופציה PUT:

$$P(X) = Xe^{-rt} * N(-d2) - S * N(-d1)$$



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

אופציית רכש על שער הדולר

ערכה של אופציית CALL אירופית על נכס בסיס המשלם ריבית r* (לדוגמא כאשר האופציה היא על הדולר) הוא:

$$C(X) = Se^{-r^*t} * N(d1) - Xe^{-rt} * N(d2)$$

כאשר:

$$d1 = \frac{\ln(S/X) + (r - r^* + 0.5\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad d2 = d1 - \sigma\sqrt{t}$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

אופציה PUT על שער הדולר

ערכה של PUT על שער הדולר הוא:

$$P(X) = Xe^{-rt} * N(-d2) - Se^{-r*t} * N(-d1)$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

PCP של אופציות דולריות

$$Se^{-r*t} + P = C + Xe^{-rt}$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

תמחור חוזה עתידי

<u>תמחור</u>:

בשוק משוכלל על נכס פיננסי שאינו מחלק ריבית או דיבידנדים מחיר הנקוב בחוזה העתידי הינו (במקרה הבדיד):

$$F = S(1+r)^t$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

תמחור חוזה עתידי –מקרה רציף

תמחור:

בשוק משוכלל, במקרה של נכס פיננסי שאינו מחלק ריבית או דיבידנדים, ערכו הנוכחי של המחיר הנקוב בחוזה העתידי שווה לערך הנכס בהווה.

$$F * e^{-rt} = S$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

אופציית רכש על חוזה עתידי

ערכה של אופציית CALL אירופית על חוזה עתידי, שהשער הנקוב בו הוא F (על פי BLACK 1976), היא:

$$C(X) = Fe^{-rt} * N(d1) - Xe^{-rt} * N(d2)$$

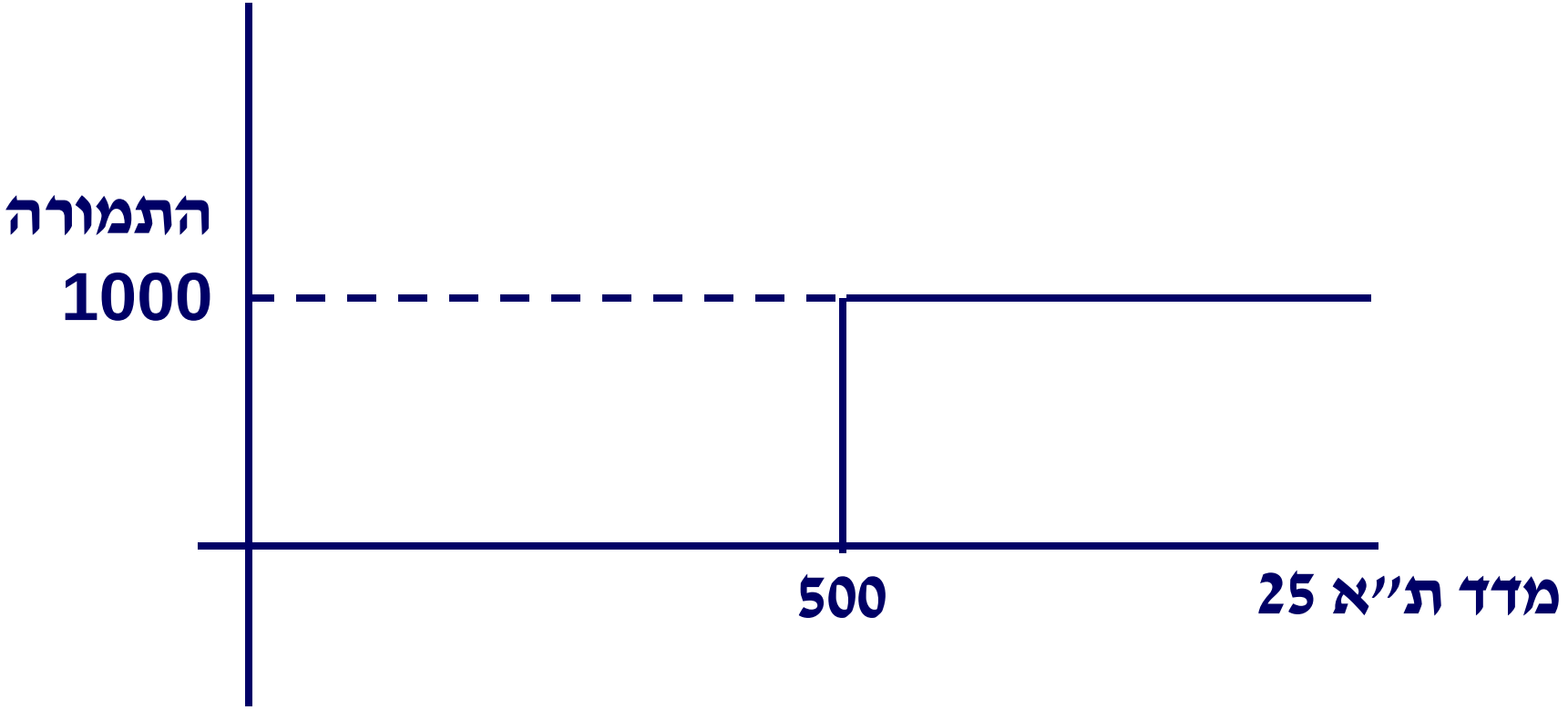
כאשר:

$$d1 = \frac{\ln(F/X) + (0.5\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad d2 = d1 - \sigma\sqrt{t}$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

אופציה בינארית-אופציה דיגיטלית

אופציה בינארית היא אופציה המאפשרת שני מצבי עולם:
למשל אופציה בינארית מסוג CALL מאפשרת לקבל סכום מסוים, למשל 1000 ₪, אם מדד ת"א 25 מעל 500 ואפס אחרת.
גרף התמורה של אופציה זו הוא כדלקמן:



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

CASH OR NOTHING CALL שווי

בעולם אדיש לסיכון ההסתברות למימוש האופציה היא N(d2).

לפיכך השווי של אופציה רכש בינארית כאשר הסכום המובטח A הוא:

$$C(X) = Ae^{-rt} * N(d2)$$

$$d1 = \frac{1n(S/X) + (r + 0.5\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad d2 = d1 - \sigma\sqrt{t}$$

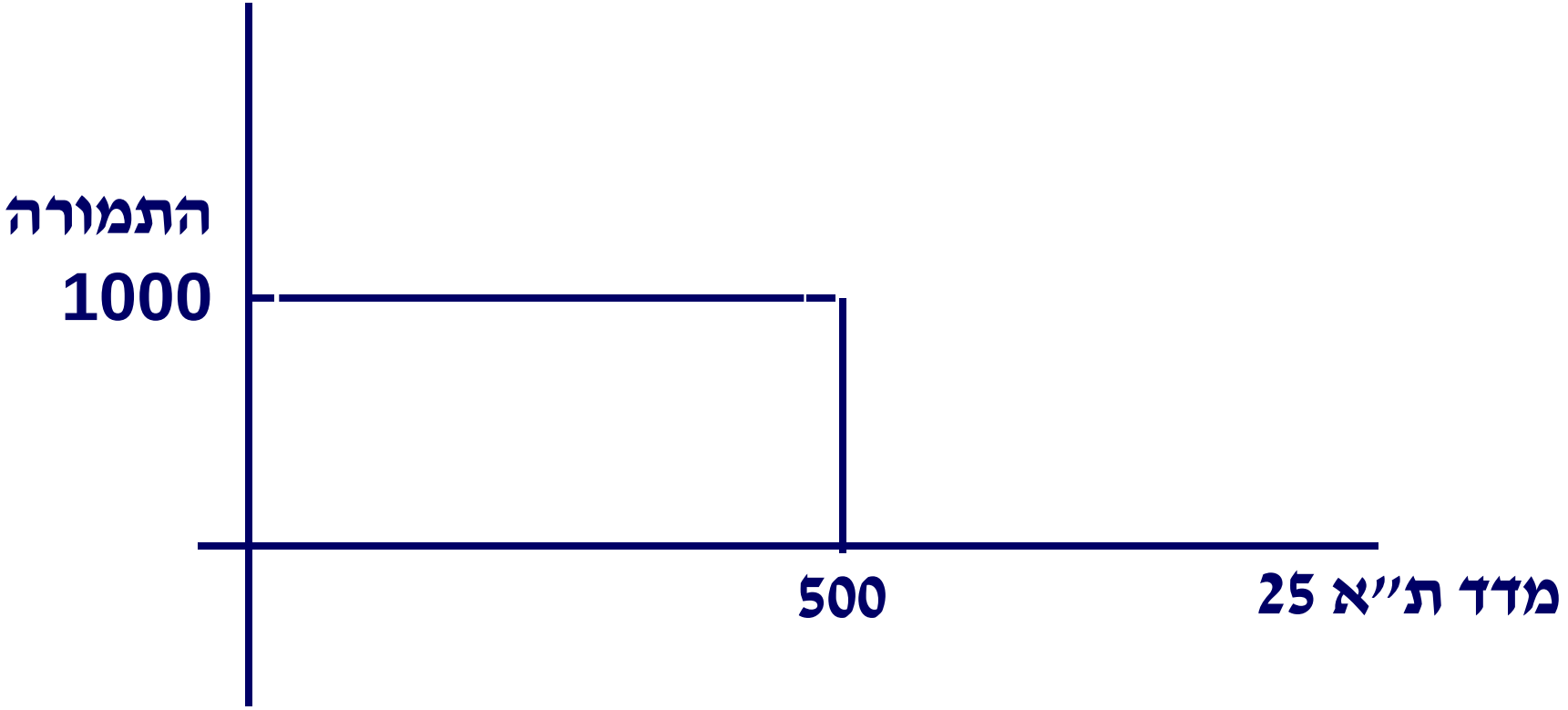
ו-N(d1) ו-N(d2) הינם ערכי d1 ו-d2 בטבלת ההתפלגות הנורמאלית הסטנדרטית.

N(d1) שווה בקרוב ל-N(d2) שווה בקרוב להסתברות למימוש האופציה.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

אופציה בינארית מסוג PUT

אופציה בינארית היא אופציה המאפשרת שני מצבי עולם:
למשל אופציה בינארית מסוג PUT מאפשרת לקבל סכום מסוים, למשל 1000 ₪ אם מדד ת"א 25 מתחת 500 ואפס אחרת.
גרף התמורה של אופציה זו הוא כדלקמן:



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

CASH OR NOTHING PUT

ערכה של אופציית מכר דיגיטלית:

$$P(X) = Ae^{-rt} * N(-d2)$$

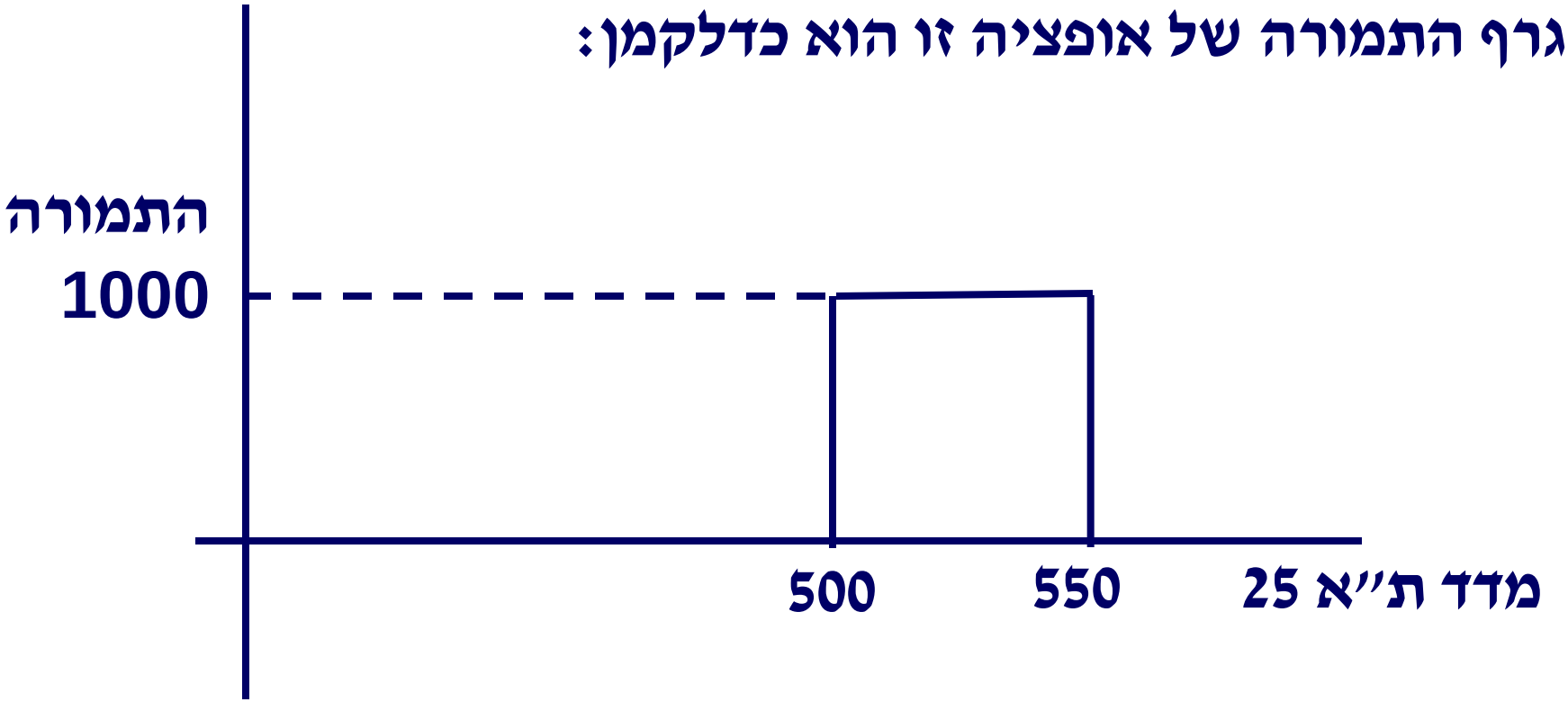
A-סכום הזכייה

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

אופציה בינארית-טווח מסוים

אופציה בינארית היא אופציה המאפשרת שני מצבי עולם:
למשל אופציה בינארית מסוג טווח מאפשרת לקבל סכום מסוים, למשל 1000 ש"ח אם מדד ת"א 25 בין 500 ל 550 ואפס אחרת.

גרף התמורה של אופציה זו הוא כדלקמן:



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

שווי אופציית טווח

יהיו N(d2) ו N(d21) ההסתברויות של d2 ו d21:

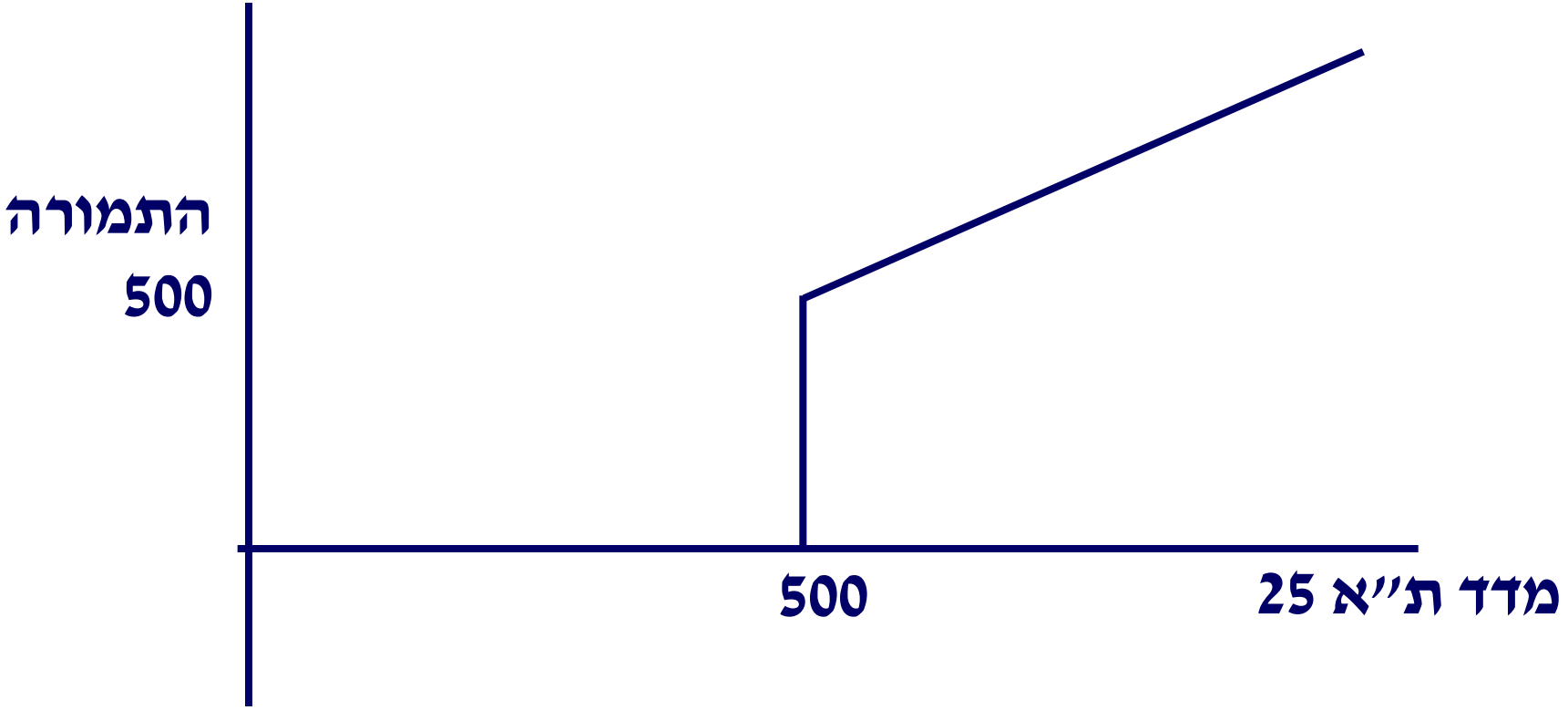
$$C(X) = Ae^{-rt} * (N(d2) - N(d21))$$

כאשר: הסכום המובטח הוא A.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

ASSET OR NOTHING CALL

אופציה בינארית היא אופציה המאפשרת שני מצבי עולם:
למשל אופציה בינארית מסוג CALL מאפשרת לקבל את
ערך הנכס אם מדד ת"א 25 מעל 500 ואפס אחרת.
גרף התמורה של אופציה זו היא כדלקמן:



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

שווי ASSET OR NOTHING CALL

לפיכך ערכה של אופציית ASSET OR NOTHING CALL

$$C(X) = A * N(d1)$$

כאשר A הוא ערך הנכס.

$$d1 = \frac{1n(S/X) + (r + 0.5\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad d2 = d1 - \sigma\sqrt{t}$$

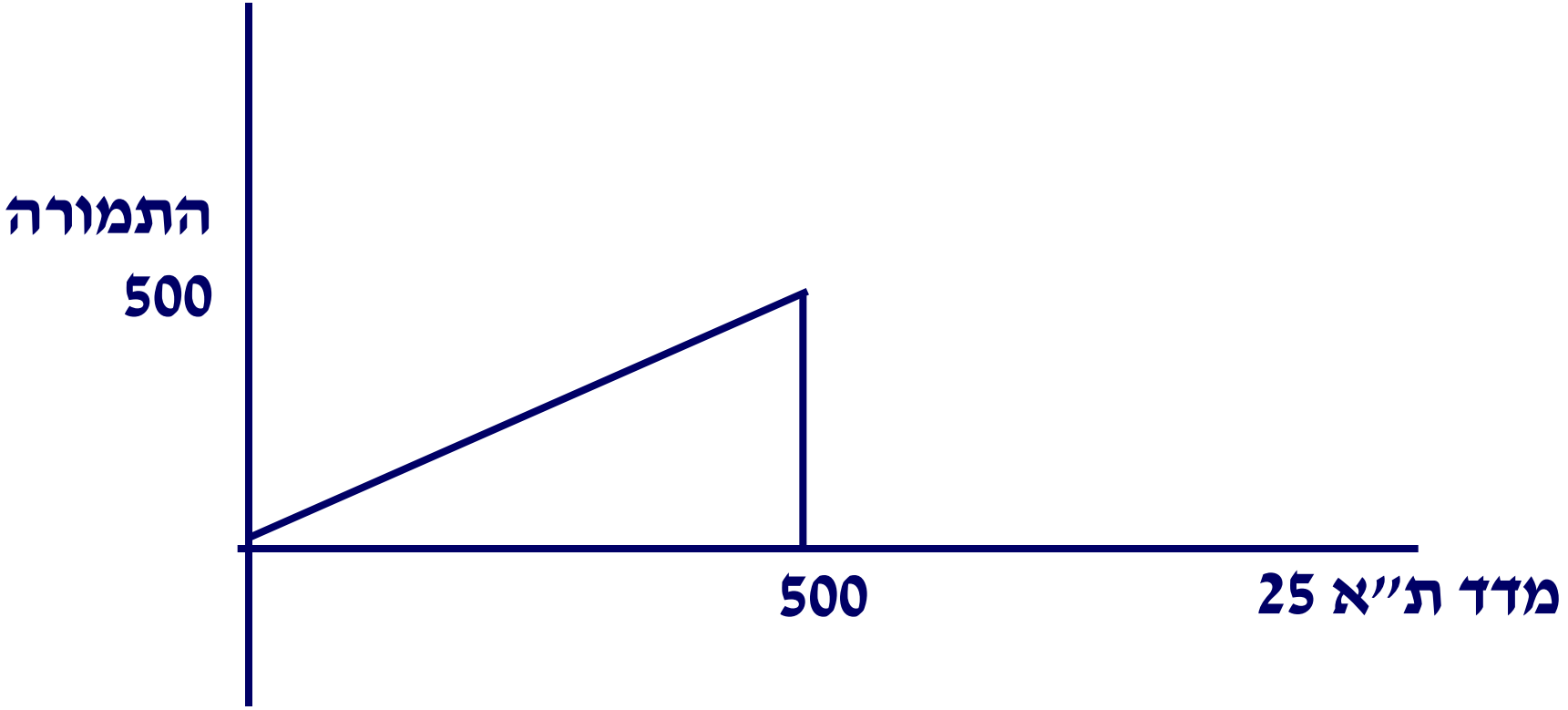
ו-N(d1) ו-N(d2) הינם ערכי d1 ו-d2 בטבלת ההתפלגות הנורמאלית הסטנדרטית.

N(d1) שווה בקרוב ל-N(d2) שווה בקרוב להסתברות למימוש האופציה.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

ASSET OR NOTHING PUT

אופציה בינארית היא אופציה המאפשרת שני מצבי עולם:
למשל אופציה בינארית מסוג PUT מאפשרת לקבל את
ערך הנכס אם מדד ת"א 25 מתחת 500 ואפס אחרת.
גרף התמורה של אופציה זו היא כדלקמן:



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

ASSET OR NOTHING PUT

לפיכך ערכה של אופציית

ASSET OR NOTHING PUT

$$P(X) = S * N(-d1)$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

שווי אופציית רכש אירופית

ערך של אופציית CALL אירופית כסכום של שתי אופציות בינאריות:

$$C(X) = S * N(d1) - Xe^{-rt} * N(d2)$$

רכש=ASSET OR NOTHING CALL–CASH OR NOTHING CALL

כאשר:

$$d1 = \frac{1n(S/X) + (r + 0.5\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad d2 = d1 - \sigma\sqrt{t}$$

ו-N(d1) ו-N(d2) הינם ערכי d1 ו-d2 בטבלת ההתפלגות הנורמאלית הסטנדרטית.

N(d1) שווה בקרוב ל-N(d2) שווה בקרוב להסתברות למימוש האופציה.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

שווי של PUT

ערכה של אופציה מכר כסכום של
שתי אופציות בינאריות:

$$P(X) = Xe^{-rt} * N(-d2) - S * N(-d1)$$

P=CASH OR NOTHING PUT-ASSET OR NOTHING PUT

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

הקדמה למודל הבינומי

הקדמה:

1978 – המודל הומצא על ידי Sharpe

על מנת להסביר בצורה פשוטה, את הדרך של תמחור אופציות,

השונה מהדרך של תמחור אגרות חוב ומניות.

ניסיונות לתמחור אופציות שלא השתמשו בדרך זו

כשלו, בגלל הקושי בתמחור הסיכון של אופציות.

ניתן להשתמש במודל זה לתמחור אופציות מיוחדות.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

המודל הבינומי-דוגמא

דוגמא:

הנח כי המודל הבינומי לתקופה אחת מתקיים. הנח עוד כי:

א- מחיר המנייה בהווה הוא 100.

ב- שער הריבית הוא 5%.

ג- מחיר המנייה יכול לעלות ל 110 או לרדת ל 90.

חשב מהו שווי אופציית CALL בעלת מחיר מימוש של 100 בתחילת התקופה?

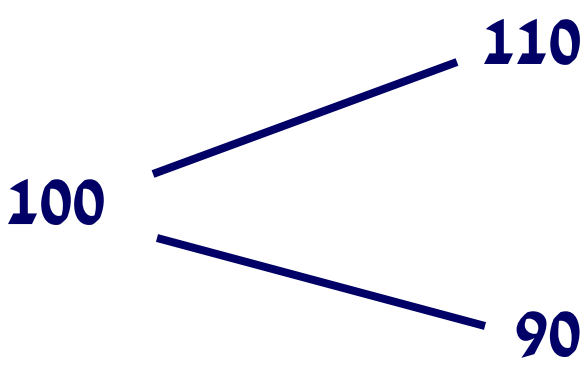
© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

ערכי נכסים בסוף התקופה

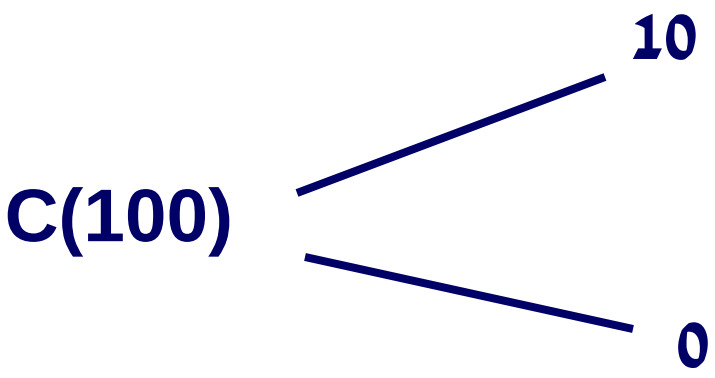
פתרון

מחיר המניה ומחיר אופציית CALL יכולים לקבל את הערכים הבאים:

מניה



אופציה CALL



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

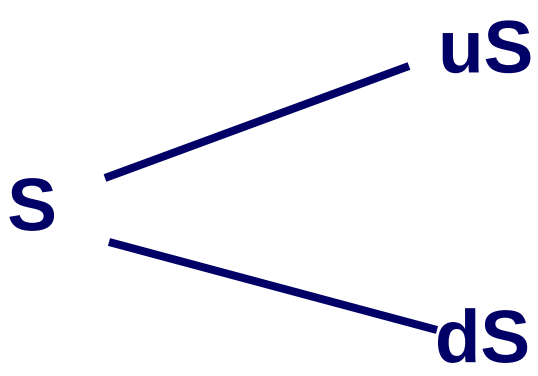
ערכי נכסים בסוף התקופה(כללי)

פתרון

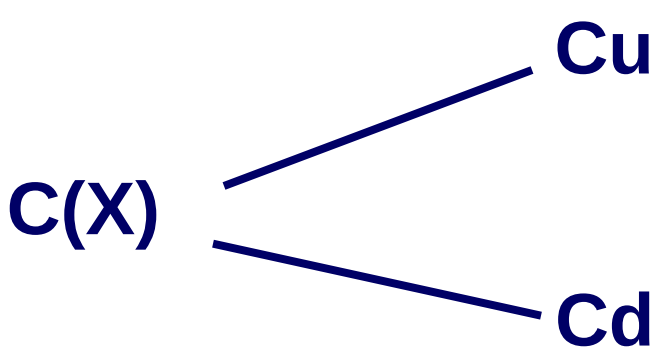
(פרמטרי)

מחיר המניה ומחיר אופציית CALL יכולים לקבל את הערכים הבאים:

מניה



אופציה CALL



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

בניית תיק חסר סיכון

יש למצוא יחס אופטימלי (המסומן ב-h) בין המניה לאופציה כך

שהתיק יהיה חסר סיכון, כלומר ערך התיק בסוף התקופה

יהיה קבוע. למשל בדוגמא שלנו , יחס של קניית חצי מנייה

על כל אופציה שאנו כותבים, גורם למשוואה הבאה בסוף התקופה:

$$0.5 \times 110 - 10 = 0.5 \times 90 - 0 = 45$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

יחס ההגנה

$$h^* x 110 - 10 = h^* x 90 - 0$$

$$h^* = \frac{10-0}{110-90} = \frac{10}{20} = 0.5$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

ערך תיק חסר סיכון

כלומר יש לקנות חצי מניה על כל אופציה CALL שמוכרים.

ערך התיק בסוף התקופה הוא:

$$0.5 \times 110 - 10 = 0.5 \times 90 - 0 = 45$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

ערך תיק בתחילת התקופה

מכיוון שהתמורה היא ודאית, אזי בשוק פיננסי משוכלל (ללא רווחי ארביטראז') מתקיימת המשוואה:

$$(h*S - C) \times (1 + r) = 45$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

שווי אופציית CALL

או 45 = (שער ריבית + 1) (השקעה בהווה)

או 42.86 = 45/1.05 = (C – 50)

לכן C= 50 – 42.86 = 7.14

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

Replicating Portfolio

מניה

100
110
90

50
55
45

אג"ח

100
105
105

42.86
45
45

אופציה

C(100)
10
0

50-42.86
10
0

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

נוסחת המודל הבינומי

ניתן לחשב ישירות שווי אופציה CALL בהתאם לנוסחה (8.2) בפרק, (נסמן ב-R את (1+r)).

$$C = \left\{ \frac{(R-d)}{(u-d)} Cu + \frac{(u-R)}{(u-d)} Cd \right\} / R$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

שווי אופציית CALL לפי הנוסחה

כלומר:

$$C = (0.75 \times 10 + 0.25 \times 0) / 1.05 = 7.14$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

חישוב ישיר של אופציית PUT

מחיר האופציה PUT הוא:

$$P=\left[\frac{(R-d)}{(u-d)}Pu+\frac{(u-R)}{(u-d)}Pd\right]\frac{1}{R}=$$

$$\left[\frac{3}{4}0+\frac{1}{4}10\right]\frac{1}{1.05}=2.38$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

שאלה- מודל בינומי 3 תקופות

חשב ערך אופציה CALL ו PUT ל-3 תקופות כאשר

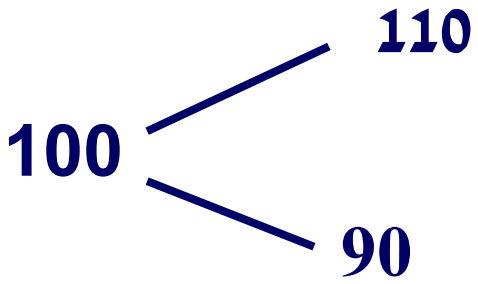
S=100 , u=1.1 , d=0.9 , X=100 , r=0.05

u , d שווים לכל תקופה.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

פתרון למודל של תקופה אחת

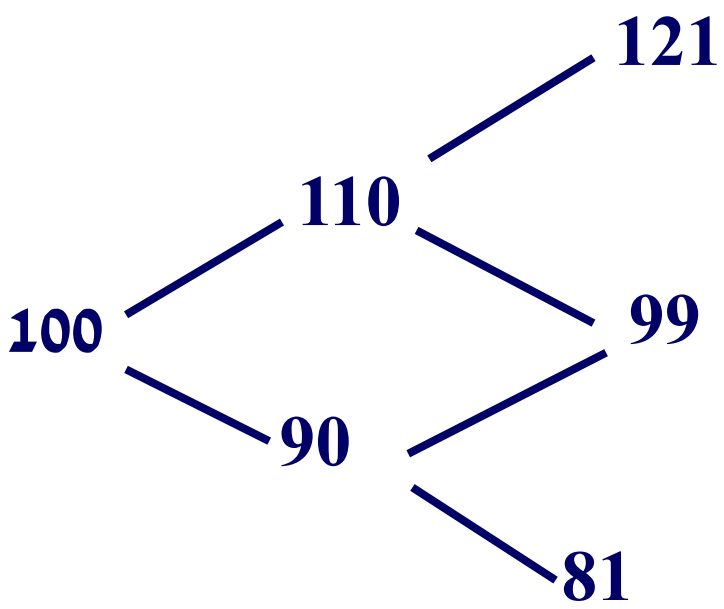
תנועת נכס הבסיס על פני זמן במודל של תקופה אחת היא:
(2 מסלולי תנועת מחיר שונים (U , D)



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

פתרון למודל של שתי תקופות

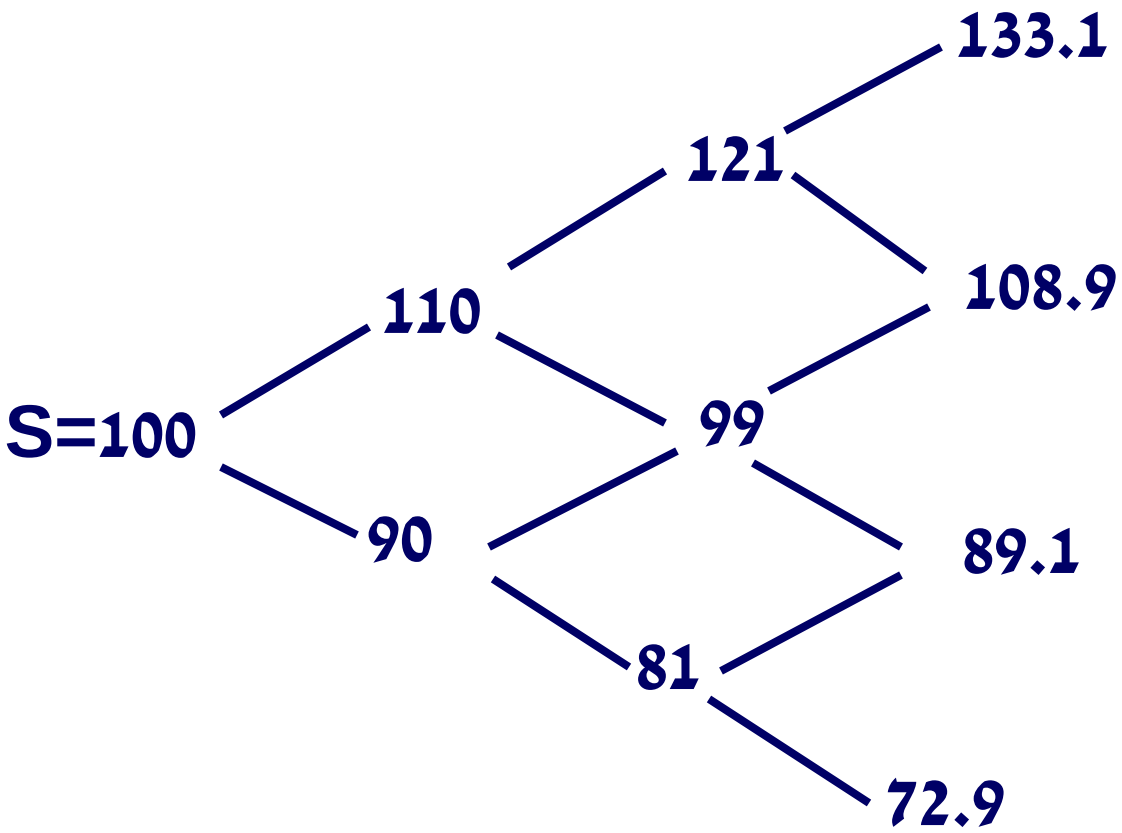
תנועת נכס הבסיס על פני זמן במודל של שתי תקופות היא:
(4 מסלולי תנועת מחיר שונים (UU,UD,DU,DD)



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

פתרון למודל של 3 תקופות

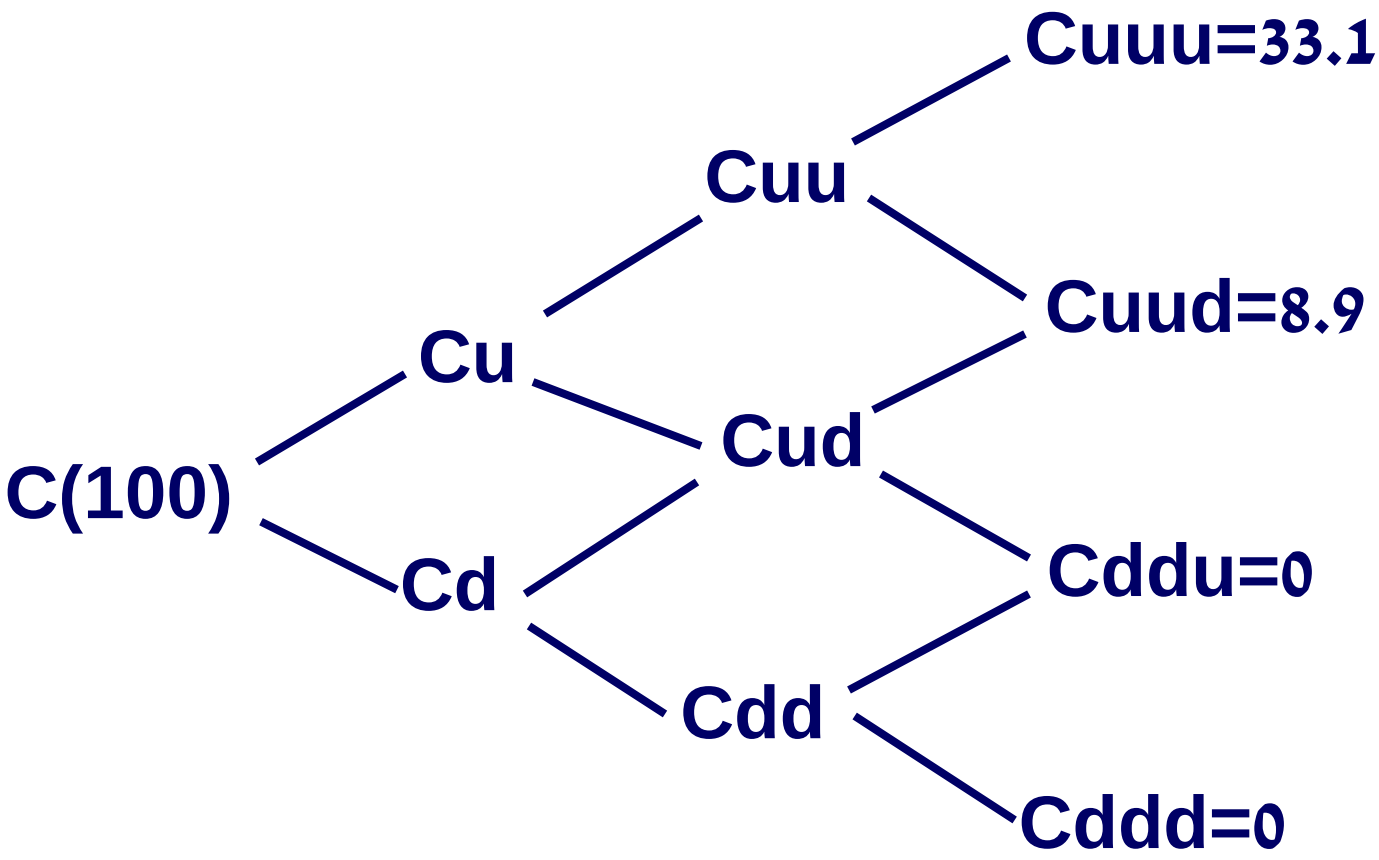
תנועת נכס הבסיס על פני זמן היא:



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

פתרון (המשך)

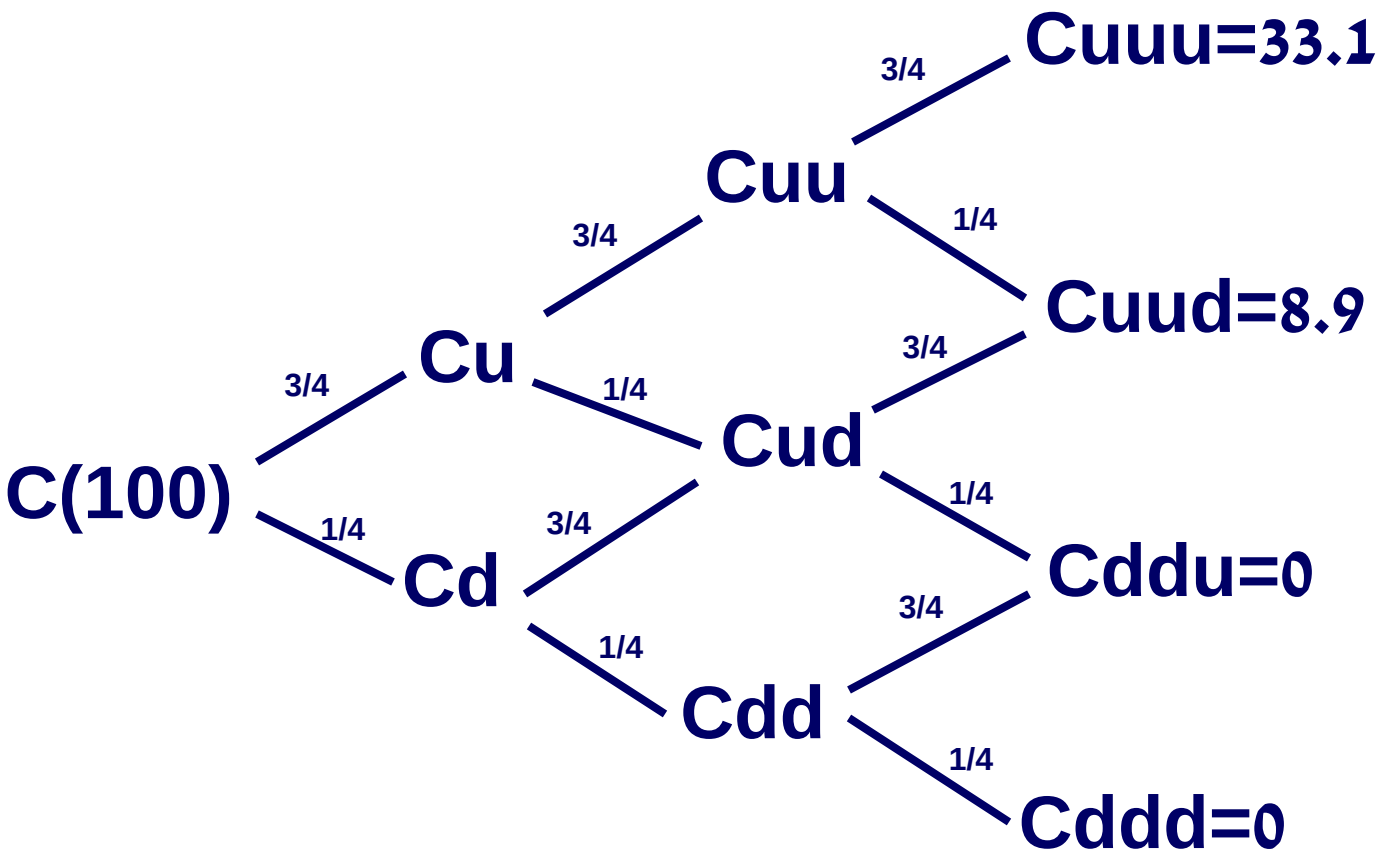
תנועת תקבולי אופציית ה Call על פני זמן היא:



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

פתרון (המשך)

תנועת שווי אופציית ה Call על פני זמן היא:



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

שווי אופציית ה Call

Cuu = (0.75*33.1 +0.25*8.9)/ 1.05=25.76
Cud = (0.75*8.9) / 1.05=6.36
Cdd=0
Cu = (0.75*25.76 + 0.25*6.35) / 1.05=19.91
Cd = (0.75*6.35) / 1.05=4.53

$$C = \left(0.75*19.91 + 0.25*4.53\right)/1.05 = 15.3$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

מסלולי מחיר נכס הבסיס- 3 תקופות

- שים לב שיש 8 מסלולים שונים:

- UUU .1

- UUD .2
- UDU .3
- DUU .4

- UDD .5
- DUD .6
- DDU .7

- DDD .8

נוסחה כללית-בינומי 3 תקופות

$$C_{uu} = \left[pC_{uuu} + (1-p)C_{duu}\right]/R$$
$$C_{du} = \left[pC_{duu} + (1-p)C_{ddu}\right]/R$$
$$C_{dd} = \left[pC_{ddu} + (1-p)C_{ddd}\right]/R$$

$$C_{u} = \left[pC_{uu} + (1-p)C_{du}\right]/R$$
$$C_{d} = \left[pC_{du} + (1-p)C_{dd}\right]/R$$
$$C = \left[pC_{u} + (1-p)C_{d}\right]/R$$
$$where\ p \equiv (R-d)/(u-d)$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

המשך-הצבה

$$C_u = \left[p^2 C_{uuu} + 2p(1-p)C_{duu} + (1-p)^2 C_{ddu}\right] / R^2$$

$$C_d = \left[p^2 C_{duu} + 2p(1-p)C_{ddu} + (1-p)^2 C_{ddd}\right] / R^2$$

$$C = \left[p^3 C_{uuu} + 3p^2(1-p)C_{duu} + 3p(1-p)^2 C_{ddu} + (1-p)^3 C_{ddd}\right] / R^3$$

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

תרגיל 2

הנח מודל בינומי של שלוש תקופות. נכס הבסיס אינו מחלק דיבידנדים. מחיר נכס הבסיס הוא 100 ₪. מחיר זה יכול לעלות או לרדת בכל תקופה ב – 10%. שער הריבית חסר הסיכון הוא 5% לכל תקופה.

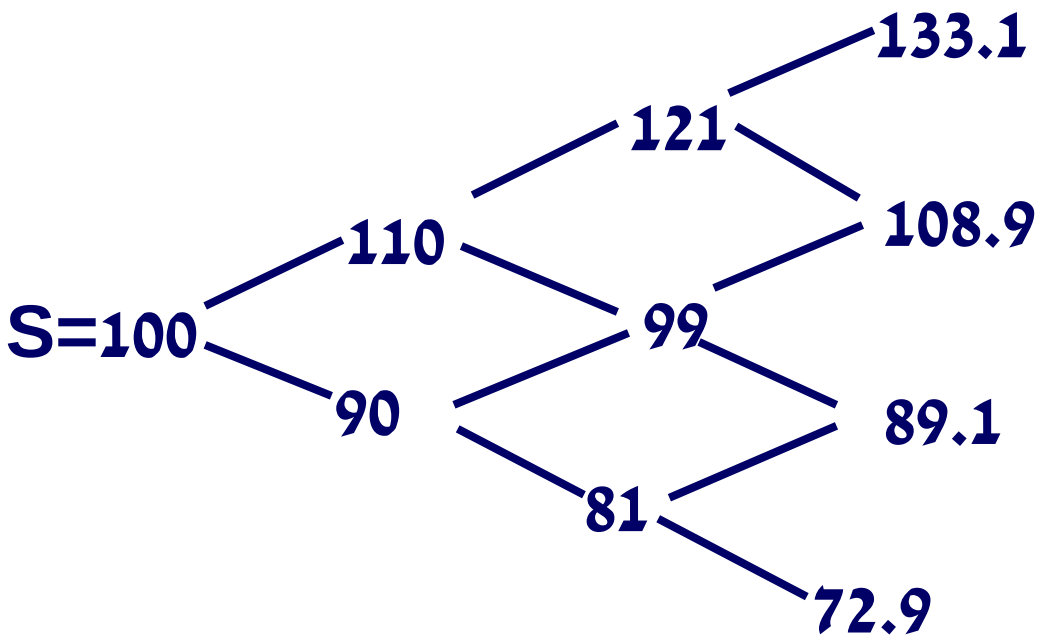
חשב ערך אופציה אירופית מסוג רכש ומכר לשלוש תקופות בעלות מחיר מימוש של 100?

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

תרגיל 2-1

חשב את ערך האופציה $C\,100$ בהווה.

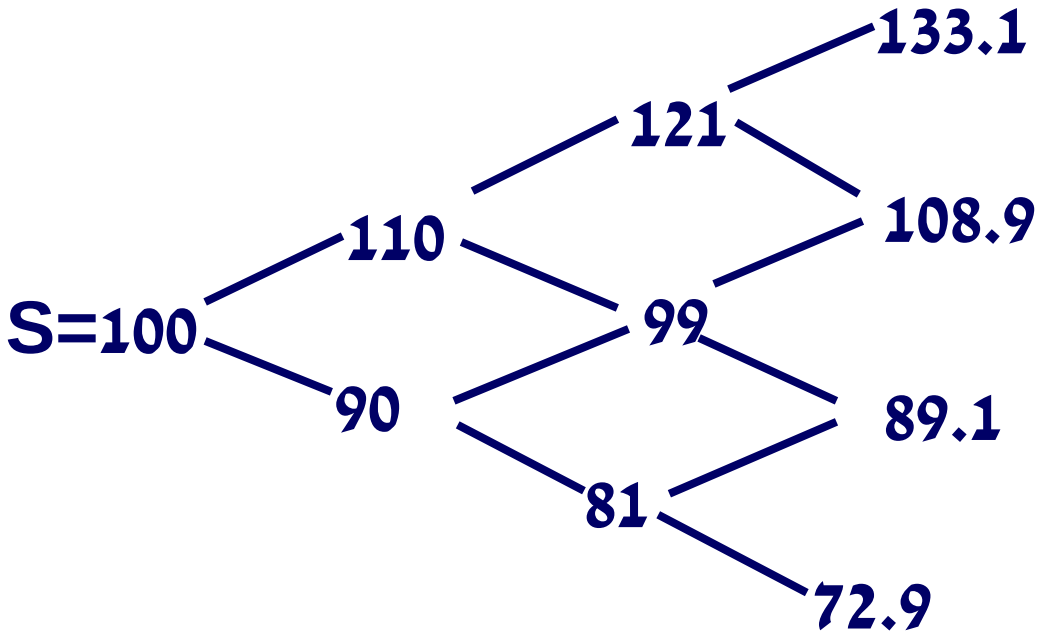
חשב את ערך האופציה $P\,100$ בהווה.



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

תרגיל 2- 2

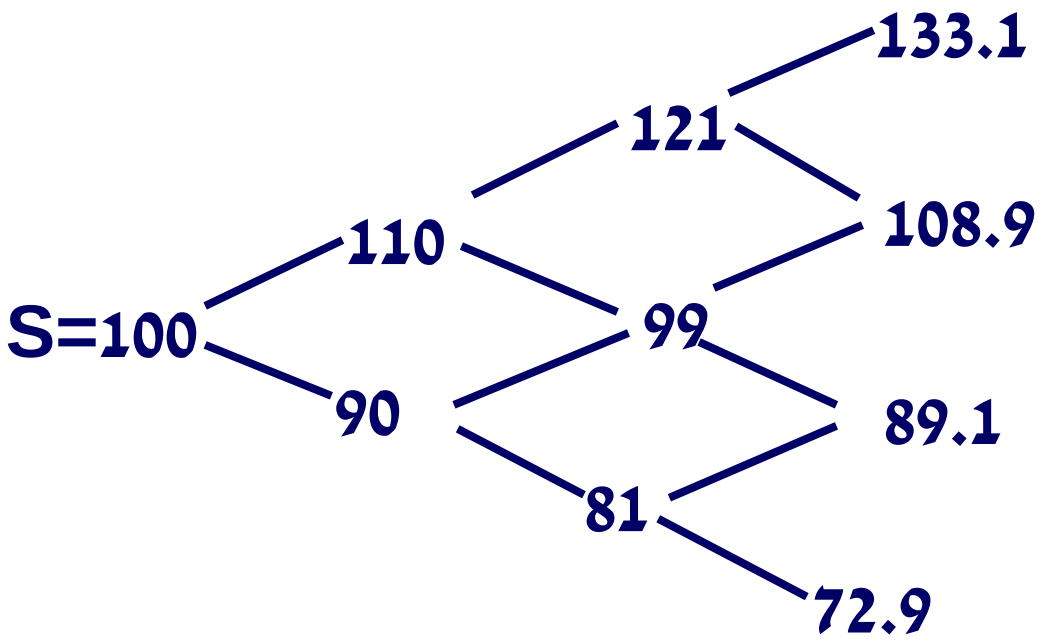
הנח נתונים ומודל כמו בשאלה 1 .
מהו הערך של אופציית רכש ואופציית מכר אסייתיות
כאשר המחיר הקובע הוא ממוצע של המחירים
בתקופה השנייה והשלישית?



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

תרגיל 2- 3

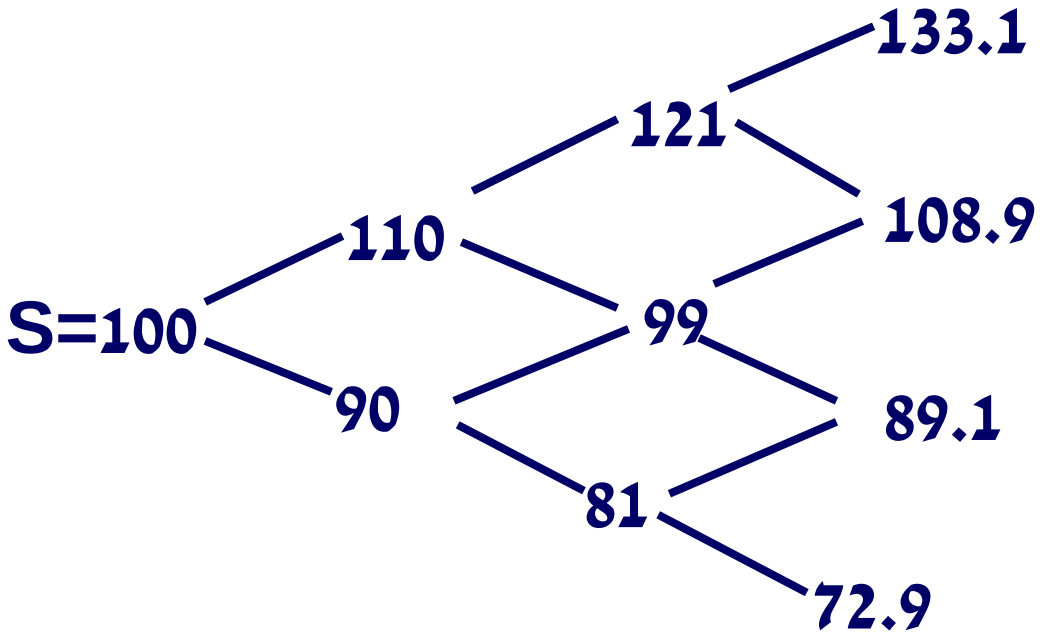
הנח מודל כמו בשאלה 1 .
מהו הערך של אופציית רכש בעלת מחיר מימוש 100
הנעלמת אם מחיר המניה יורד מתחת ל – 100?



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

תרגיל 2 - 4

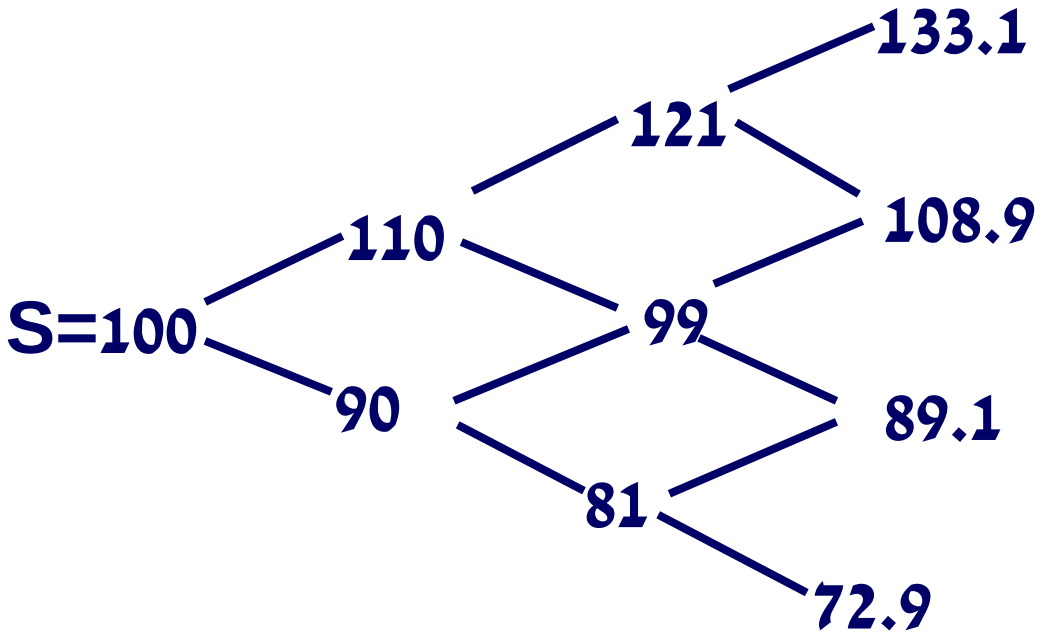
הנח מודל כמו בשאלה 1 .
מהו הערך של אופציית מכר בעלת מחיר מימוש 100
הנעלמת אם מחיר המניה עולה מעל ל – 100?



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

תרגיל 2- 5

תאר את התמורה הכוללת מתיק המכיל גם אופציית LOOKBACK CALL וגם אופציית LOOKBACK PUT לאותו מועד פקיעה ועל אותו נכס בסיס.



© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

שאלת חזרה-1

הנח כי אופציה Z שמנפיק הבנק נותנת 2000 באם המדד מעל 250 ,אחרת 0.

באם:

C(240)=1000 , C(250)=500,

א- Z שווה פחות מ - 1000.

ב- Z שווה לפחות 1000.

ג- Z שווה לא יותר מ - 500.

ד- אף תשובה לא נכונה.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

שאלת חזרה-2

הנח כי אופציה Z היא אופציה עם מחיר מימוש 300 אשר מקנה למחזיק בה במועד המימוש את הזכות להחליט אם זו אופציית רכש או אופציית מכר.

מחירי האופציות בבורסה הם:

$$P(300)=500,\quad C(310)=1000,\quad C(300)=1500$$

א- Z שווה יותר מ 2000.

ב- Z שווה לא יותר מ 1500.

ג- Z שווה 2500.

ד- אף תשובה לא נכונה.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

שאלת חזרה-3

הנח כי אופציה Z שמנפיק הבנק נותנת את הערך הנמוך מבין C(200) , P(240).

באם:

C(200)=1000 , C(220)=500 , C(240)=100

Z שווה:

א- 0.

ב- 100.

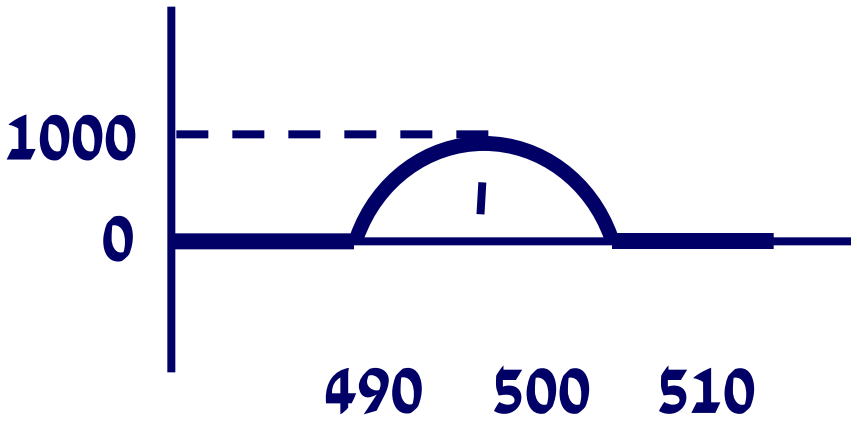
ג- 1000.

ד- אף תשובה לא נכונה.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

שאלת חזרה-4

להלן ערכה של Z כפונקציה של מדד מעוף במועד המימוש:



באם:

C(490)=1500,C(510)=700 C(500)=1000

Z עשויה להיות שווה:

א- 100.

ב- 200.

ג- 300.

ד- אף תשובה לא נכונה.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

שאלת חזרה-5

אופציה "THE BEST" נותנת במועד המימוש את השווי הגבוה מבין כל האופציות PUT או CALL עם מחירי מימוש בין 400 ל- 500.

שוויה של אופציה זו כיום הוא:

א- P(500)+C(400)

ב- P(400)+C(500)

ג- המקסימום בין C(400) ל-P(500)

ד- P(450)+C(450) + 5000₪ מהוון

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

מוצרים מובנים והמשבר הפיננסי

עד 2007 חל גידול משמעותי בהנפקת מוצרים מובנים בעולם

2004- 250 ביליון דולר

2005- 600 ביליון דולר

2006- 1100 ביליון דולר

2007-1300 ביליון דולר

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור

מוצרים מובנים והמשבר

מורכבות המכשירים המובנים לצד חוסר השקיפות הביאה לכך שגופים רבים התקשו לתמחרם ולבצע הערכה נכונה של הסיכון בהם.

בסקר עולמי שנערך לאחר המשבר בקרב 150 מוסדות פיננסים מובילים בעולם כ 60% ציינו כי הם מתקשים בתמחור נכון של מוצרים מובנים רבים וכ 40% ציינו כי הם מתקשים לבצע ניהול סיכונים בכל הנוגע למוצרים מובנים.

קריסת בנקי ההשקעות בארצות הברית שהיוו חלק מהמנפיקים גרמו באופן טבעי לירידת ההיצע מצד אחד , ומצד שני ירד הביקוש עקב המשבר הפיננסי שיוחס ברובו למכשירים פיננסים.

© כל הזכויות שמורות לפרופסור רפי אלדור